

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Введение в математическую логику
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
курс:	2
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: М.Н. Вялый, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры математических основ управления 12.05.2023

Аннотация

Курс дает введение в математическую логику. В нем рассматриваются как вопросы выразимости формулами первого порядка, так и классические логические системы - исчисление высказываний, исчисление предикатов и исчисление резолюций (лежащее в основе всех алгоритмов автоматического доказательства теорем и проверки выполнимости булевых формул). Важной темой в курсе является алгоритмическая сложность логических теорий: неразрешимость множества общезначимых формул и неречислимость формул, истинных в арифметике.

В результате успешного освоения курса студенты получают базовые представления о логическом формализме, возможностях формализации содержательных математических знаний и ограничениях этого подхода. Эти знания и навыки будут востребованы в дальнейшем при изучении дисциплин, связанных с алгоритмами и логикой.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Изучение основ математической логики.

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний в области математической логики;
- приобретение умений и навыков работы с логическими формулами и логическими теориями;
- оказание консультаций и помощи студентам в изучении дополнительных разделов математической логики, необходимых для их собственных теоретических исследований в области дискретной математики.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-3 Способен осуществлять социальное взаимодействие и реализовывать свою роль в команде	УК-3.1 Способен устанавливать разные виды коммуникации (учебную, научную, деловую, неформальную и др.)
	УК-3.2 Взаимодействует с другими членами команды для достижения поставленной задачи
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные понятия, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть данной дисциплины;
- основные свойства таких формальных систем как исчисление высказываний, исчисление предикатов и исчисление резолюций;
- подходы и методы для решения типовых задач математической логики.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач о формальных системах;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно излагать математические знания в области математической логики в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач;
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов математической логики;
- навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Булевы функции и булевы формулы. Тавтологии, совместные множества формул.	2	3		2
2	Алгоритмы разбора формулы и вычисления значения формулы.	3	3		2
3	Основные понятия логики первого порядка.	2	3		3
4	Теории и модели.	2	2		3
5	Общезначимые формулы.	3	2		2
6	Выразимость формулами логики первого порядка.	3	3		3
7	Исчисление высказываний, корректность, полнота.	3	3		3
8	Исчисление предикатов.	3	3		3
9	Исчисление резолюций для булевых формул и логики первого порядка.	3	2		3
10	Неразрешимость множества общезначимых формул.	3	3		3
11	Неперечислимость множества формул, истинных в арифметике.	3	3		3
Итого часов		30	30		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

1. Булевы функции и булевы формулы. Тавтологии, совместные множества формул.

Совместные и несовместные множества формул. Лемма о дереве и теорема компактности. Семантическое следствие.

2. Алгоритмы разбора формулы и вычисления значения формулы.

Представление формулы в виде дерева. Алгоритмы разбора формулы и вычисления значения формулы. Тавтологии, выполнимые формулы. Выразимость булевыми формулами.

3. Основные понятия логики первого порядка.

Кванторы, термы, формулы, свободные и связанные вхождения переменных в формулы. Замкнутые формулы.

4. Теории и модели.

Примеры теорий и их моделей. Выразимость предикатов.

5. Общезначимые формулы.

Метод автоморфизмов доказательства невыразимости предикатов.

6. Выразимость формулами логики первого порядка.

Бескванторные формулы, элиминация кванторов и доказательства невыразимости. Примеры.

7. Исчисление высказываний, корректность, полнота.

Элементарная эквивалентность моделей. Игры Эренфойхта и критерий элементарной эквивалентности. Применение игр Эренфойхта для доказательства невыразимости предикатов.

8. Исчисление предикатов.

Корректность и непротиворечивость. Теорема дедукции. Полные и непротиворечивые множества формул. Полнота исчисления высказываний.

9. Исчисление резолюций для булевых формул и логики первого порядка.

Корректность и полнота. (Полиномиальная) сводимость задачи проверки выполнимости булевой формулы к задаче выполнимости КНФ.

Сколемизация. Универсальные дизъюнкты, исчисление резолюций для универсальных дизъюнктов (ИР). Корректность и полнота ИР.

10. Неразрешимость множества общезначимых формул.

Постановка задачи достижимости в ассоциативном исчислении и тождества слов в полугруппе. Примеры разрешимых случаев. Неразрешимость задачи достижимости в ассоциативном исчислении и проблемы тождества слов в полугруппе. Проблема тождества слов в полугруппах. Сводимость проблемы тождества слов к проверке общезначимости формулы.

11. Неперечислимость множества формул, истинных в арифметике.

Арифметическая кодировка машин Тьюринга. Построение сводимости проблемы не остановки на пустом входе к проверке истинности арифметической формулы. Синтаксическая и семантическая версии. Основные идеи доказательств.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиапроектором и экраном.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Дискретный анализ. Формальные системы и алгоритмы [Текст] : учеб. пособие для вузов / Ю. И. Журавлев, Ю. А. Флор, М. Н. Вялый .— М. : Контакт Плюс, 2010 .— 336 с.
2. Языки и исчисления [Текст] : лекции по мат. логике и теории алгоритмов / Н. К. Верещагин, А. Шень .— 4-е изд., испр. — М. : МЦНМО, 2012 .— 240 с.
3. Вычислимые функции [Текст] : лекции по мат. логике и теории алгоритмов / Н. К. Верещагин, А. Шень .— 4-е изд., испр. — М. : МЦНМО, 2008, 2012 .— 160 с.

Дополнительная литература

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://www.mou.mipt.ru>
<http://vyalyy.narod.ru/da3.html>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Не предусмотрено.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий курс «Введение в математическую логику», должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия, аксиомы, методы доказательств.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- изучение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- решение задач, предлагаемых студентам на практических занятиях и в качестве курсового задания;
- подготовку к практическим занятиям, дифференцированному зачету.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач. При решении задач каждое действие необходимо аргументировать, ссылаясь на известные теоретические сведения.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
курс:	<u>2</u>
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: М.Н. Вялый, канд. физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-3 Способен осуществлять социальное взаимодействие и реализовывать свою роль в команде	УК-3.1 Способен устанавливать разные виды коммуникации (учебную, научную, деловую, неформальную и др.)
	УК-3.2 Взаимодействует с другими членами команды для достижения поставленной задачи
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Введение в математическую логику» обучающийся должен:

знать:

- основные понятия, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть данной дисциплины;
- основные свойства таких формальных систем как исчисление высказываний, исчисление предикатов и исчисление резолюций;
- подходы и методы для решения типовых задач математической логики.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач о формальных системах;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно излагать математические знания в области математической логики в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач;
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов математической логики;
- навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Задания представлены в прикрепленном файле.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Задания представлены в прикрепленном файле.

Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.

3. Перечень типовых контрольных вопросов, заданий, тем, используемых для оценки знаний, умений, навыков

Примеры задач, которые могут быть включены в задания и контрольные работы

1. Являются ли тавтологиями следующие формулы логики высказываний:

- а) $(a \rightarrow (c \vee x)) \wedge (b \rightarrow (d \vee \neg x)) \rightarrow (a \wedge b \rightarrow (c \vee d))$;
б) $((\neg(z \rightarrow x) \rightarrow \neg y) \rightarrow ((\neg(z \rightarrow x) \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow x))) \rightarrow (y \rightarrow z)$;
в) $(y \rightarrow z) \rightarrow ((\neg(z \rightarrow x) \rightarrow y) \rightarrow (\neg(y \rightarrow z) \rightarrow (\neg(z \rightarrow x) \rightarrow y)))$;
г) $(\neg z \rightarrow y) \rightarrow ((x \rightarrow (\neg z \rightarrow y)) \rightarrow ((x \rightarrow \neg z) \rightarrow (x \rightarrow y)))$.

2. Докажите, что если в формулу исчисления высказываний каждая переменная входит лишь один раз, то эта формула не является тавтологией.

3. Пусть Γ – множество булевых формул, имеющих вид

$$x \rightarrow (A \rightarrow \neg x)$$

где A – любая формула. Является ли формула x семантическим следствием множества формул Γ ?

4. Может ли формула

$$\forall y (\forall x A(x, y) \rightarrow \forall x A(y, x)) \rightarrow \forall x (\forall y A(y, x) \rightarrow \forall x A(x, y))$$

выражать в некоторой интерпретации на целых числах предикат « $xy = 0$ »?

5. Найдите формулу первого порядка, которая истинна в любой интерпретации на конечной области и ложна в некоторой интерпретации на бесконечной области.

6. Является ли общезначимой формула $\forall x \exists y A(f(x, y), x) \rightarrow \exists y A(f(f(y, y), y), f(y, y))$?

7. Укажите такие терм t и формулу A с одним параметром, что формула $A(t) \rightarrow \exists x A(x)$ не является общезначимой.

8. В модели арифметики носитель – множество неотрицательных целых чисел, бинарные предикаты сравнения чисел и равенства чисел, функции сложения и умножения, а также константы 0, 1. Выразите в этой модели предикаты:

а) «число x является степенью 2»; б) «число x простое»; в) «число x является степенью 10».

9. Докажите невыразимость предиката «слово w является квадратом» в модели, носитель которой – двоичные слова, а единственный бинарный предикат в модели – «слово u является префиксом слова v ».

10. Может ли быть аксиомой исчисления высказываний формула вида

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg B \rightarrow C) \rightarrow (C \rightarrow A)),$$

где A, B, C – некоторые формулы?

11. Постройте вывод формул в исчислении высказываний, не используя теорему о полноте:

- а) $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$;

б) $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow (A \vee C));$

в) $A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow A;$

г) $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \rightarrow (B \vee C).$

12. Множество Γ формул исчисления высказываний таково, что из него нельзя вывести любую формулу исчисления высказываний, но из множества $\Gamma \cup \{x, y\}$ уже можно вывести любую формулу исчисления высказываний. Следует ли из этого, что из множества Γ можно вывести формулу $x \rightarrow \neg y$? (x, y – переменные).

13. Постройте опровержение резолюциями для КНФ.

(а) $(x \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee \neg z) \wedge (z \vee u) \wedge (z \vee \neg u);$

(б) $(a \vee e) \wedge (\neg a \vee \neg e) \wedge (b \vee d) \wedge (\neg b \vee \neg d) \wedge$
 $(a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c) \wedge$
 $(c \vee d \vee \neg e) \wedge (c \vee \neg d \vee e) \wedge (\neg c \vee d \vee e) \wedge (\neg c \vee \neg d \vee \neg e).$

14. Проверьте методом резолюций выполнимость КНФ

$$(x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee x_4) \wedge (x_3 \vee \neg x_4)$$

15. Проверьте методом резолюций общезначимость формулы

$$\exists x \forall y (A(y) \rightarrow ((A(x) \rightarrow D(x)) \rightarrow ((D(x) \rightarrow C(x)) \rightarrow C(y))))$$

16. Докажите, что существует алгоритм проверки равенства слов для полугруппы с двумя порождающими a, b и соотношением $aba = bab$. Оцените время работы такого алгоритма в зависимости от длины сравниваемых слов.

17. Ассоциативное исчисление содержит только правила преобразования слов вида $w \rightarrow a$, где a – символ алфавита, w – непустое слово. Докажите, что проблема достижимости для такого исчисления алгоритмически разрешима.

18. Докажите, что алгоритмически неразрешима проблема достижимости для ассоциативных исчислений в алфавите из двух символов.

19. Разрешимо ли множество таких общезначимых формул первого порядка, что в формуле (а) нет функциональных символов, а все предикатные символы – унарные; (б) все предикатные и все функциональные символы – унарные?

20. Перечислимо ли множество замкнутых выполнимых формул первого порядка (выполнимая формула истинна хотя бы в одной интерпретации)?

21. Перечислимо ли множество замкнутых формул первого порядка, которые истинны хотя бы в одной интерпретации на конечной области?

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся по итогам обучения

1. Может ли быть аксиомой исчисления высказываний формула вида $(\neg B \rightarrow A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow C) \rightarrow (C \rightarrow \neg A))$, где A, B, C — формулы?
2. Докажите, что тавтологии не описываются конечным числом схем формул. Другими словами, для любого конечного множества тавтологий Γ найдется такая тавтология,

- которая не получается из какой-нибудь формулы, принадлежащей Γ , подстановкой формул вместо переменных.
3. Справедливо ли в исчислении высказываний следующее утверждение о выводимости $z \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow \neg y) \vdash \neg(x \rightarrow \neg y)$?
 4. Не используя теоремы о полноте исчисления высказываний, докажите, что $A, B, \neg C \vdash \neg(\neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B))$.
 5. В формуле A исчисления высказываний все переменные различны. Докажите, что существует такая формула B , что $A \not\vdash B$.
 6. Формулы A, B исчисления высказываний таковы, что для любой формулы X выполнено $A \rightarrow B \vdash X$ или $B \rightarrow A \vdash X$. Докажите, что тогда $A \rightarrow B \vdash \neg(B \rightarrow A)$.
 7. Для формул A, B исчисления высказываний выполняются условия $A \vdash B$ и $B \vdash \neg A$. Докажите, что $\vdash \neg A$.
 8. Формулы A, B исчисления высказываний таковы, что для любой формулы X выполнено $A \rightarrow B \vdash X$ или $\neg A \vdash X$. Докажите, что тогда $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow A$.
 9. Множество Γ формул исчисления высказываний включает в себя те и только те формулы, в которые входят переменные x, y . Верно ли, что для переменной z выполнено $\Gamma \vdash z$?
 10. Пусть для любой формулы B в исчислении высказываний выполнено $A \vdash B$. Верно ли, что формула A невыполнима?
 11. Для формул A, B исчисления высказываний выполняются условия $\neg A \vdash B$ и $B \vdash A$. Докажите, что тогда выполнено $\vdash A$.
 12. Укажите такое множество формул исчисления высказываний $\{A_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, что для любых $i < j$ выполняется $A_i \vdash A_j$, но $A_j \not\vdash A_i$.
 13. Формулы исчисления высказываний разбиты на два непересекающихся множества и так, что для любой $A \in$ выполнено $\vdash A$. Докажите, что $\vdash \neg x$ (x — переменная).
 14. Формулы A, B исчисления высказываний таковы, что $A \vdash B$ и $\neg B \vdash A$. Докажите, что для любой формулы X исчисления высказываний справедливо $\neg B \vdash X$.
 15. A — некоторая формула исчисления высказываний. Верно ли, что каждый вывод формулы $\neg A \rightarrow \neg A$ в исчислении высказываний содержит хотя бы два применения правила modus ponens?
 16. Известно, что формула исчисления высказываний $(A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg B \rightarrow C) \rightarrow B)$, где A, B, C — некоторые формулы, выводима. Верно ли, что любой ее вывод в исчислении высказываний содержит не менее трёх формул?
 17. Обязательно ли вывод формулы исчисления высказываний вида $(A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg B \rightarrow C) \rightarrow (C \rightarrow A))$, где A, B, C — формулы, содержит не менее трёх формул? (В предположении, что формула выводима.)
 18. Докажите, что в исчислении высказываний существует вывод формулы $x_1 \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge \dots \wedge x_n) \rightarrow (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge \dots \wedge (x_1 \vee x_n)$ длиной $O(n)$ формул.
 19. Докажите, что в исчислении высказываний существует вывод формулы $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n \rightarrow \neg(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \dots \vee \neg x_n)$ длины $O(n)$ формул.
 20. Докажите, что в исчислении высказываний существует вывод формулы $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge \dots \wedge (x_1 \vee x_n) \rightarrow x_1 \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge \dots \wedge x_n)$ длиной $O(n)$ формул.
 21. Докажите, что в исчислении высказываний существует вывод формулы $x \rightarrow y \rightarrow x \rightarrow x \rightarrow \dots \rightarrow x$ длиной $O(n)$ формул (количество вхождений переменной x нечетно).

22. Докажите, что для любой перестановки $\sigma \in S_n$ формула $\bigwedge_j x_j \rightarrow \bigwedge_j x_{\sigma(j)}$ выводится в ИВ за $O(n)$ шагов.
23. Докажите, что есть такой полином $p(n)$, что длина вывода любой 2-ДНФ тавтологией (т.е. тавтологии, которая является дизъюнкцией пар литералов) не превосходит $p(n)$, где n — длина записи формулы A .
24. Докажите, что существует выводимая формула исчисления высказываний, которая встречается только в выводах длины больше 100.
25. Существует ли полное непротиворечивое множество формул исчисления высказываний, в котором каждая формула не содержит импликаций?
26. Верно ли, что существует полное и непротиворечивое множество формул исчисления высказываний, каждая из которых имеет вид $A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$?
27. Пусть Γ — множество всех формул исчисления высказываний вида $A \rightarrow B$, где A, B — произвольные формулы. Верно ли, что Γ — полное? (Т.е. для любой формулы C выполнено $\Gamma \vdash C$ или $\Gamma \vdash \neg C$.)
28. Существует ли полное непротиворечивое множество формул исчисления высказываний, в котором ни одна формула не содержит вхождений переменной x_1 ?
29. Существует ли полное непротиворечивое множество формул исчисления высказываний, которое содержит формулы $z \rightarrow (\neg x \rightarrow \neg z)$, $(y \rightarrow x) \rightarrow (x \rightarrow \neg x)$?
30. Постройте пример полного непротиворечивого множества формул исчисления высказываний, которое содержит формулу $\neg(x \rightarrow (y \rightarrow z))$.
31. Постройте пример такого полного непротиворечивого множества формул исчисления высказываний, что каждая формула в этом множестве содержит не менее 10 переменных.
32. Постройте пример полного непротиворечивого множества формул исчисления высказываний, каждая формула в котором содержит не менее 3 импликаций.
33. Пусть в формулы из некоторого множества Γ не входит переменная x , но $\Gamma \vdash x$. Верно ли, что множество Γ противоречиво?
34. Пусть Γ — такое множество формул исчисления высказываний, что любые две формулы из этого множества имеют не больше одной общей переменной. Верно ли, что множество Γ непротиворечиво?
35. Докажите, что из любого противоречивого множества можно выбрать конечное противоречивое подмножество.
36. Докажите, что полное непротиворечивое множество формул бесконечно.
37. Существует ли такая формула логики первого порядка в сигнатуре из одноместных предикатных символов, которая задает в некоторой интерпретации на области из 8 элементов предикат равенства « $x = y$ »?
38. Приведите пример формулы исчисления предикатов, в которую входят ровно три переменные (возможно, много раз) и которая в одной интерпретации задает предикат равенства « $x = y$ », а в другой — предикат неравенства « $x \neq y$ ».
39. Существует ли формула исчисления предикатов, которая ложна при любой интерпретации на области из менее 20 элементов, но истинна в некоторой интерпретации на области из 20 элементов?
40. Существует ли такая формула логики первого порядка в сигнатуре из одного бинарного функционального символа и одного унарного предикатного символа, которая истинна в любых интерпретациях на областях из менее чем 11 элементов и ложна в некоторой интерпретации на области из 11 элементов?
41. Какой предикат задает формула $\forall x(\forall y A(x, y) \rightarrow \forall x A(y, x))$ в интерпретации на множестве действительных чисел, если $A(x, y)$ интерпретируется как предикат « $xy = y$ »?

42. Можно ли написать замкнутую формулу первого порядка, которая истинна в некоторой интерпретации на множестве из 5 элементов, и ложна во всех интерпретациях на множествах другой мощности?
43. Приведите пример замкнутой формулы первого порядка, которая истинна в некоторой бесконечной интерпретации и ложна во всех конечных интерпретациях.
44. В формулу A логики первого порядка каждая переменная входит не более одного раза. Верно ли, что A не является общезначимой?
45. Существует ли общезначимая формула, которая содержит ровно одно вхождение предикатного символа?
46. Укажите такие терм t и формулу A с одним параметром, что формула $\neg A(t) \vee \exists x A(x)$ не является общезначимой.
47. Напишите формулу в предварённой нормальной форме, эквивалентную формуле $\neg(\exists x B(x) \rightarrow \forall x A(x)) \rightarrow \exists x A x(x)$.
48. Проверьте общезначимость формулы $\forall x \forall y (A(x, y) \rightarrow A(x, f(x)))$.
49. Общезначима ли формула $\forall u \forall x \exists y \exists v (A(x, y) \rightarrow A(u, v))$?
50. Проверьте выполнимость формулы $\exists x \forall y (\forall x A(x, y) \rightarrow \forall y \neg A(x, y))$.
51. Выполнима ли формула $\forall x \exists y (A(f(y), y) \rightarrow \neg A(x, f(x)))$?
52. Проверьте общезначимость формулы $\forall x \exists y A(f(x, y), x) \rightarrow \exists y A(f(f(y, y), y), f(y, y))$.
53. Проверьте общезначимость формулы $\exists x \forall y \exists z ((A(x) \rightarrow B(y)) \wedge (A(z) \rightarrow B(y)))$.
54. Является ли общезначимой следующая формула $\exists x \forall y (A(x, y) \wedge \neg A(y, x) \rightarrow (A(x, x) \sim A(y, y)))$?
55. Эквивалентны ли формулы $\exists x (\exists y A(x, y) \rightarrow \exists y B(x, y))$ и $\forall x \exists y A(x, y) \rightarrow \exists x \exists y B(x, y)$?
56. Эквивалентны ли формулы $\forall x (\exists y A(x, y) \rightarrow \exists y B(x, y))$ и $\forall x \exists y (A(x, y) \rightarrow B(x, y))$?
57. Справедливо ли следующее утверждение: Если переменная x не имеет свободных вхождений в формулу A первого порядка, то, заменив в формуле A все вхождения переменной x на y , мы получим эквивалентную формулу?
58. Замкнутая формула A первого порядка содержит кванторы, пропозициональные связки и четыре унарных предикатных символа. Известно, что A истинна в любой интерпретации на области из 14 элементов. Верно ли, что A общезначима?
59. Язык формальной арифметики содержит константы 0, 1, функции сложения $a(x, y)$ и умножения $m(x, y)$, предикат равенства $E(x, y)$. Выразительные средства — пропозициональные связки, кванторы всеобщности и существования. Существует ли формула формальной арифметики, которая выражает бинарный предикат «число x имеет ровно y простых делителей»?
60. Язык формальной арифметики содержит константы 0, 1, функции сложения $a(x, y)$ и умножения $m(x, y)$, предикат равенства $E(x, y)$. Выразительные средства — пропозициональные связки, кванторы всеобщности и существования. Существует ли формула формальной арифметики, которая выражает унарный предикат «двоичная запись числа x содержит ровно две единицы»?
61. Формулы формальной арифметики — это формулы первого порядка в сигнатуре из констант 0, 1, функции сложения $a(x, y)$ и умножения $m(x, y)$, предикат равенства $E(x, y)$ (интерпретируются на множестве натуральных чисел как указано). Выразим ли формулой формальной арифметики предикат « x имеет ровно 48 делителей»?
62. Ассоциативное исчисление содержит только правила преобразования слов вида $w \rightarrow a$, где a — символ алфавита, w — непустое слово. (а) Докажите, что задача достижимости для такого исчисления алгоритмически разрешима. (б) Докажите, что

существует одноленточная машина Тьюринга, которая решает эту задачу на памяти $O(n \log n)$, где n — длина входа.

63. Докажите, что разрешима задача достижимости для ассоциативного исчисления в алфавите a, b с правилами преобразования слов $aa \rightarrow aba$, $b \rightarrow \lambda$ (λ — пустое слово). Опишите алгоритм для 2-ленточной машины Тьюринга, который решает эту проблему за время $O(n)$, где n — длина входа.
65. Докажите, что разрешима проблема тождества слов для ассоциативного исчисления в алфавите a, b с правилами преобразования слов $a \rightarrow \lambda$, $b \rightarrow \lambda$ (λ — пустое слово). Опишите алгоритм для 2-ленточной машины Тьюринга, который решает эту проблему за время $O(n)$, где n — длина входа.
66. Разрешима ли задача проверки равенства слов для полугрупп, в которых левая часть каждого соотношения имеет длину 1?
67. Разрешима ли задача проверки равенства слов для полугрупп с соотношениями вида $ai = av$ (здесь a — некоторая фиксированная образующая, общая для всех соотношений)?
68. Разрешима ли проверка общезначимости формул логики первого порядка, в которые входит один бинарный функциональный символ и произвольное количество унарных предикатных символов и констант?
69. Перечислимо ли множество замкнутых формул логики первого порядка, истинных во всех бесконечных интерпретациях?
70. Ассоциативное исчисление называется ациклическим, если никакое слово нельзя получить из самого себя после нескольких (хотя бы одной) замен. Перечислимо ли множество ациклических исчислений?

Примеры вопросов на доказательства из курса:

1. Доказательство того, что значение формулы первого порядка зависит только от значений параметров формулы.
2. Доказательство теоремы дедукции в исчислении высказываний.
3. Доказательство корректности сколемизации (выполнимость сколемизации равносильна выполнимости исходной формулы).
4. Доказательство полноты метода резолюций для формул первого порядка (для невыполнимой формулы существует опровержение).
5. Доказательство теоремы о предваренной нормальной форме.
6. Сводимость проверки выполнимости формулы исчисления высказываний к проверке выполнимости КНФ.

Примеры задач.

Легкие:

1. Существует ли выводимая формула исчисления высказываний, начинающаяся с отрицания?
2. Найдите формулу в предваренной нормальной форме, равносильную формуле

$$\neg((\forall x B(x) \rightarrow \exists x A(x)) \rightarrow \forall x A(x)).$$

Средние:

3. Разрешимо ли множество формул первого порядка с одним параметром?
4. Является ли общезначимой следующая формула

$$\exists x \forall y (A(x, y) \wedge \neg A(y, x) \rightarrow (A(x, x) \sim A(y, y))) ?$$

Трудные:

5. Докажите, что для любой перестановки σ формула

$$\bigvee_j x_j \rightarrow \bigvee_j x_{\sigma(j)}$$

выводится в исчислении высказываний за $O(n)$ шагов, где n – количество переменных.

6. Докажите, что формула

$$\exists x \forall y \exists z ((F(y, z) \rightarrow F(x, z)) \rightarrow (F(x, x) \rightarrow F(y, x)))$$

истинна в любой интерпретации на конечной области и ложна в некоторой интерпретации на бесконечной области.